**Olimpiada de matematică faza locală**
21 februarie 2016
**Soluţii şi bareme**
**Clasa a IX-a**

1. a) Daţi un exemplu de numere iraţionale $a, b$, astfel încât numerele $a+b$ şi $ab$ să fie numere raţionale nenule.
b) Fie $a, b$ numere reale. Arătaţi că există un număr iraţional $c$ astfel încât numerele $a+c$ şi $b+c$ să fie iraţionale.
**Soluţie.** a) Exemplu corect ..... 4p
b) Presupunând contrariul, pentru orice $x$ iraţional, unul dintre numerele $a+x$, $b+x$ este raţional. Alegem $x$ iraţional şi apoi perechile $(a+x, b+x)$, $(a+2x, b+2x)$, $(a+3x, b+3x)$. Cel puţin 2 perechi vor avea o aceeaşi componentă număr raţional. Prin scădere, deducem $x \in \mathbb{Q}$ sau $2x \in \mathbb{Q}$, absurd ..... 3p

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $S_n$ suma primilor $n$ termeni. Fie $p, q$ numere naturale nenule, diferite. Ştiind că $S_p = q$ şi $S_q = p$, calculaţi $S_{p+q}$.
**Soluţie.** Un calcul direct arată că $S_p - S_q = (p-q)\frac{a_1+a_{p+q}}{2}$ ..... 3p
Deducem că $\frac{a_1+a_{p+q}}{2} = -1$ ..... 1p
şi apoi că $S_{p+q} = \frac{1}{2}(p+q)(a_1+a_{p+q}) = -(p+q)$ ..... 3p

3. Vectorii $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}$ au lungimile egale şi suma zero. Arătaţi că sunt doi câte doi vectori opuşi.
**Soluţie.** Deoarece suma vectorilor este nulă, ei reprezintă laturile unui patrulater ..... 3p
Deoarece au lungimi egale, patrulaterul este romb, laturile opuse fiind egale şi paralele, de unde concluzia 4p

4. O dreaptă care trece prin centrul de greutate al triunghiului $ABC$ intersectează laturile $AB$ şi $AC$ în punctele $M$ şi $N$. Arătaţi că
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{AN}{NC} \geq 4.$$

**Soluţie.** Dacă $MN \| BC$, atunci $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 2$ şi inegalitatea devine egalitate ..... 2p
Dacă nu, fie $P$ intersecţia dintre $MN$ şi $BC$ şi $D$ mijlocul lui $BC$. Aplicând Menelaus în $ABD$ şi $ACD$ obţinem, prin însumare, $\frac{MB}{AM} + \frac{NC}{AN} = 1$ ..... 3p
Inegalitatea cerută rezultă acum din inegalitatea mediilor ..... 2p

**Olimpiada de matematică**
**faza locală**
21 februarie 2016

Soluţii şi bareme
**Clasa a X-a**

1. Fie $a, b, c$ numere pozitive, diferite de 1. Notăm

$$x = \log_a bc, \quad y = \log_b ac, \quad z = \log_c ab.$$

Arătaţi că

$$x + y + z + 2 = xyz.$$

**Soluţie.** Avem $x + 1 = \log_a abc$, de unde $\log_{abc} a = \frac{1}{x+1}$ şi analoagele ..... 3p
Deducem $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$ ..... 2p
Concluzia ..... 2p

2. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}.$$

**Soluţie.** Observăm că $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2$ ..... 2p
deci ecuaţia se scrie $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ ..... 1p
Se observă soluţia $x = 1$ ..... 1p
Soluţia e unică deoarece membrul stâng e funcţie strict crescătoare ..... 3p

3. Să se arate că nu există funcţii injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$f(3^x) + f(5^x) = 8,$$

pentru orice $x$ real.
**Soluţie.** Presupunând că există $f$ injectivă, pentru $x = 1$ obţinem $f(3) + f(5) = 8$. Pentru $x = \log_3 5$, obţinem $f(5) + f\left(5^{\log_3 5}\right) = 8$ ..... 3p
Deducem $f(3) = f\left(5^{\log_3 5}\right)$ şi, din injectivitate, $3 = 5^{\log_3 5}$ ..... 2p
Logaritmând egalitatea în baza 3, obţinem o contradicţie ..... 2p

4. Fie $u, v, w$ numere complexe astfel ca

$$u + v + w = u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Arătaţi că $|u| = |v| = |w|$.
**Soluţie.** Avem $w = -u - v$ şi apoi $u^2 + v^2 + (-u - v)^2 = 0$, de unde $u^2 + v^2 + uv = 0$ ..... 3p
Înmulţind cu $u - v$, deducem $u^3 - v^3 = 0$, de unde $u^3 = v^3$, deci $|u| = |v|$ ..... 3p
Analog $|u| = |w|$ ..... 1p

**Olimpiada de matematică**
**faza locală**
21 februarie 2016
Soluţii şi bareme
**Clasa a XI-a**

1. a) Fie $A \in M_{3,1}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(AA^t) = 0$.
b) Fie $B \in M_{3,2}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(BB^t) = 0$.
c) Fie $C \in M_{3,3}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(C - C^t) = 0$.
**Soluţie.** a) În matricea $AA^t$, oricare 2 linii sunt proporţionale ..... 2p
b) Dacă
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$
atunci $B \cdot B^t = \overline{B} \cdot \overline{B}^t$, unde
$$\overline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$
Atunci $\det(BB^t) = \det\left(\overline{B}\right) \det\left(\overline{B}^t\right) = 0$ ..... 2p
c) Determinantul oricărei matrice este egal cu determinantul transpusei, deci
$$\det\left(C - C^t\right) = \det\left(\left(C - C^t\right)^t\right) = \det\left(C^t - C\right) = \det\left(-\left(C - C^t\right)\right) = -\det\left(C - C^t\right),$$
de unde concluzia ..... 3p

2. Se consideră şirul definit astfel: $x_1 = 1$,
$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n},$$
pentru orice $n$.
a) Aflaţi limita şirului.
b) Calculaţi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

**Soluţie.** a) Şirul este strict crescător ..... 1p
Dacă ar fi mărginit, ar converge către un număr real $L$, şi am obţine prin trecere la limită $L = L + \frac{1}{2L}$, absurd, deci limita este $\infty$ ..... 3p
b) Calculăm, cu Stolz Cesaro,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(x_n + \frac{1}{2x_n}\right)^2 - x_n^2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4x_n^2}\right) = 1,$$
deci limita cerută este 1 ..... 3p

3. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $2A + 3B = 6AB$. Arătaţi că $AB = BA$.
**Soluţie.** Egalitatea dată este echivalentă cu
$$I_n - 2A - 3B + 6AB = I_n$$
sau
$$(I_n - 2A)(I_n - 3B) = I_n$$
..... 3p
Deducem că matricele $I_n - 2A$ şi $I_n - 3B$ sunt inverse una celeilalte, deci avem şi
$$(I_n - 3B)(I_n - 2A) = I_n,$$
..... 3p
de unde obţinem $2A + 3B = 6BA$, deci şi concluzia ..... 1p

4. Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty.$$

**Soluţie.** Fie

$$h_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Şirul este strict crescător. Dacă nu ar avea limita $\infty$, ar fi convergent. Fie în acest caz $H$ limita sa ..... 2p
Atunci

$$\lim_{n\to\infty}(h_{2n}-h_n)=H-H=0.$$

..... 2p
dar

$$h_{2n}-h_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

contradicţie..... 3p

**Olimpiada de matematică**
**faza locală**
21 februarie 2016
Soluţii şi bareme
**Clasa a XII-a**

1. Calculaţi

$$\int \left(3x^{10}+2x^{7}\right)\sqrt[3]{x^{3}+1}dx.$$

**Soluţie.** Avem

$$\begin{aligned}\int \left(3x^{10}+2x^{7}\right)\sqrt[3]{x^{3}+1}dx &= \int \left(3x^{8}+2x^{5}\right)\sqrt[3]{x^{6}\left(x^{3}+1\right)}dx \\ &= \int \left(3x^{8}+2x^{5}\right)\sqrt[3]{x^{9}+x^{6}}dx.\end{aligned}$$

. . . . . 3p
Dacă notăm $x^9+x^6=t$, avem $\left(9x^8+6x^5\right)dx=dt$, sau $\left(3x^8+2x^5\right)dx=\frac{1}{3}dt$. . . . . 2p
Integrala devine

$$\frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}dt=\frac{1}{4}t^{\frac{4}{3}}+\mathcal{C},$$

de unde

$$\int \left(3x^{10}+2x^{7}\right)\sqrt[3]{x^{3}+1}dx=\frac{1}{4}\left(x^{9}+x^{6}\right)^{\frac{4}{3}}+\mathcal{C}.$$

. . . . . 2p

2. Pe o mulţime $M$ este definită o lege de compoziţie asociativă, cu proprie-tatea

$$(xy)^{2016}=yx,$$

pentru orice $x,y$. Arătaţi că legea este comutativă.
**Soluţie.** Punem $n$ în loc de 2016. Avem $(xy)^n=yx$, de unde $((xy)^n)^n=(yx)^n=xy$. . . . . 3p
Pe de altă parte, $((xy)^n)^n=\left((xy)^{n-1}(xy)\right)^n=(xy)(xy)^{n-1}=(xy)^n=yx$, de unde concluzia . . . . . 4p

3. Arătaţi că dacă integrala

$$\int_0^a \cos^3(\pi x+\pi t)\,dt$$

nu depinde de $x\in\mathbb{R}$, atunci $a$ este un număr întreg par.
**Soluţie.** Facem schimbarea de variabilă $x+t=u$. Obţinem

$$\int_0^a \cos^3(\pi x+\pi t)\,dt=\int_x^{x+a}\cos^3(\pi u)\,du.$$

. . . . . 2p
Fie $F(u)$ o primitivă a funcţiei $f(u)=\cos^3(\pi u)$. Atunci

$$\int_x^{x+a}\cos^3(\pi u)\,du=F(x+a)-F(x).$$

. . . . . 2p
Dacă integrala nu depinde de $x$, atunci $(F(x+a)-F(x))'=0$ (derivarea se face după variabila $x$), de unde

$$\cos^3(\pi x+\pi a)=\cos^3(\pi x),$$

pentru orice $x$. . . . . 2p
Pentru $x=0$, obţinem $\cos^3(\pi a)=1$, deci $\cos(\pi a)=1$, de unde $\pi a=2k\pi$, cu $k$ întreg. . . . . 1p

4. Fie $G$ un grup finit. Arătaţi că pentru orice elemente $x, y$ din $G$ are loc

$$\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord}(yx).$$

**Soluţie.** Deoarece $G$ este finit, orice element are ordin finit. Fie $x, y \in G$ şi $n = \operatorname{ord}(xy)$, $m = \operatorname{ord}(yx)$. Deducem că $(xy)^n = e$, de unde $x(yx)^{n-1} y = e$ ..... 3p
Dar $x(yx)^{n-1} y = e$ implică $(yx)^{n-1} = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1}$, de unde $(yx)^n = e$, ceea ce implică $\operatorname{ord}(yx) \leq n$, adică $m \leq n$ ..... 3p
Similar obţinem $n \leq m$, deci $m = n$ ..... 1p